

Vorkurs

I. Zahlen

II. Variable

III. Mengen und Logik

IV. Funktionen, Folgen

V. Differenzieren

VI. Integrieren

VII. Vektoren

VIII. Gleichungssysteme - Matrizen

I. Zahlen

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$$

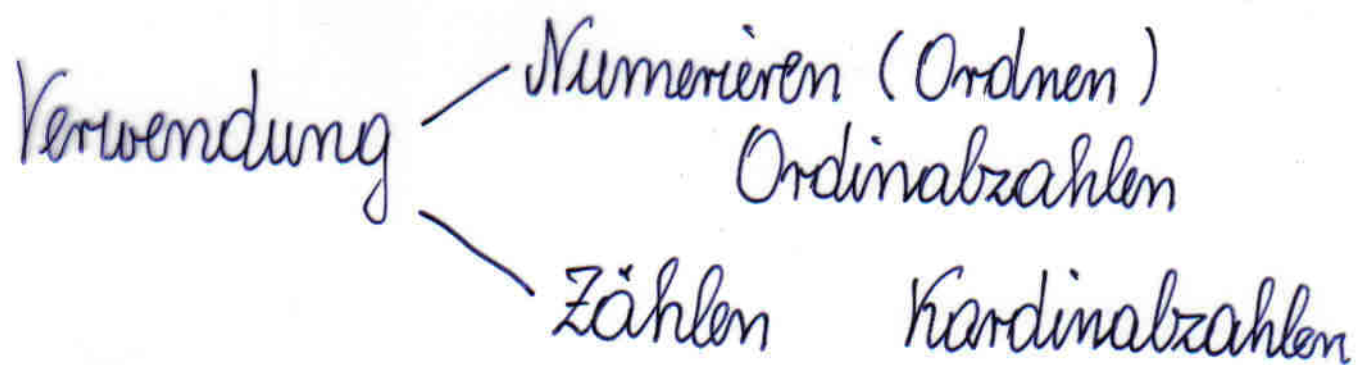
$$\mathbb{Q}^+ = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{N} \wedge b \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{x}{y} \mid x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{N} \right\}$$

\mathbb{R}

\mathbb{C}

1. Natürliche Zahlen



Eineindeutige Zuordnung zwischen den Mengen A und B , wenn

- (1) Jedem Element von A ist genau ein Element aus B zugeordnet.
- (2) Jedes Element von B ist genau einem Element von A zugeordnet.

Definition: Eine Menge M heißt endlich, wenn eine eineindeutige Zuordnung zwischen M und einem Anfangsstück von \mathbb{N} möglich ist.

Eine Menge M heißt unendlich, wenn sie nicht endlich ist

→ LA I

M ist abzählbar unendlich
heißt

$$\Leftrightarrow |M| = |\mathbb{N}| \quad (=: \aleph)$$

Bsp:

$$\{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N}, n = 2k\} \quad \begin{array}{l} \text{gerade Zahl} \\ > 0 \end{array}$$

$$\{n \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k+1\} \quad \begin{array}{l} \text{ungerade} \\ \text{Zahlen} \end{array}$$

\mathbb{Q}

M heißt überabzählbar unendlich
ist

$$\Leftrightarrow |M| \neq |\mathbb{N}|, M \text{ unendlich} \\ |M| =: \mathfrak{c}$$

\mathbb{R}, \mathbb{I}

Darstellung

- Stellenwertsystem mit Basis 10
- Division mit Rest

Satz: Es sei $a \in \mathbb{N}_0$, $b \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

(1) Es gibt Zahlen $q, r \in \mathbb{N}_0$, so daß
$$a = q \cdot b + r \text{ und } r < b$$

(2) Wenn $a = q \cdot b + r$, $r < b$ und
$$a = q' \cdot b + r', \quad r' < b$$

dann ist $q = q'$ und $r = r'$

- Stellenwertsystem mit Basis b

Satz: Bei vorgegebener „Basis“ $b \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ gibt es zu jeder Zahl $a \in \mathbb{N}$ eine „Stellenzahl“ $s \in \mathbb{N}$ und „Ziffern“ $z_i \in \{0, 1, \dots, b-1\}$ so daß gilt:
$$z_1 \neq 0 \text{ und } a = z_1 \cdot b^{s-1} + z_2 \cdot b^{s-2} + \dots + z_{s-1} \cdot b + z_s$$

Dabei sind die Stellenzahl s und die Ziffern z_1, \dots, z_s eindeutig

• Schreibweise:

$$z_1 \cdot b^{s-1} + z_2 \cdot b^{s-2} + \dots + z_{s-1} \cdot b + z_s = \sum_{i=1}^s z_i b^{s-i}$$

• Horner - Schema

$$a = (31224)_5 \quad ? \quad a = (\quad)_{10}$$

$$a = 3 \cdot 5^4 + 1 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^1 + 4 =$$

$$= (((3 \cdot 5 + 1) \cdot 5 + 2) \cdot 5 + 2) \cdot 5 + 4$$

0		15		80		410		2060
+3	.5	+1	.5	+2	.5	+2	.5	+4
3		16		82		412		2064

Polynome

0		$a_4 \cdot x$		$a_4 \cdot x^2 + a_3 x$		$a_4 x^3 + a_3 x^2 + a_2 x$	
+a ₄	.x	+a ₃	.x	+a ₂	.x	+a ₁	.x	+a ₀
a ₄		$a_4 \cdot x + a_3$		$a_4 \cdot x^2 + a_3 x + a_2$		$a_4 x^3 + a_3 x^2 + a_2 x + a_1$		

Primzahlen

alternative Definition:

$p \in \mathbb{P}$ ($\subseteq \mathbb{N}$, Menge der Primzahlen)

:(\Leftrightarrow)

$$p \in \mathbb{N} \quad \wedge$$

$$p > 1 \quad \wedge$$

$$\forall n \in \mathbb{N}: n|p \Rightarrow n=1 \vee n=p$$

Dazu

$$a, b \in \mathbb{N}$$

$$a|b : \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}: b = k \cdot a$$

$$\text{d.h. } r = 0$$

Primzahlen

Definition: Eine Zahl $p \in \mathbb{N}$ heißt Primzahl, wenn sie ungleich 1 ist und nicht als Produkt zweier kleinerer natürlicher Zahlen dargestellt werden kann.

Bew. zu $|P| = |N|$

i.) $|P|$ nicht endlich

Sieb des ERATOSTHENES
mit Widerspruchsbeweis

Ann. $|P| = m$

i.)

1	2	3	4	5	...
↓	↓	↓	↓	↓	
2	3	5	7	11	...

Axiome von Peano:

- (1) $1 \in \mathbb{N}$
- (2) Jede natürliche Zahl n hat einen eindeutig bestimmten Nachfolger n'
- (3) 1 ist nicht Nachfolger einer natürlichen Zahl
- (4) Wenn $n \neq m$ ist, so ist $n' \neq m'$
- (5) Sei A eine Teilmenge von \mathbb{N} mit folgenden Eigenschaften:
 - (a) $1 \in A$
 - (b) falls $n \in A$, dann $n' \in A$Dann ist $A = \mathbb{N}$

Beweisprinzip der vollständigen Induktion

Sei $A(n)$ eine Aussage, die für jedes $n \in \mathbb{N}$ gegeben ist. Falls

- (1) $A(1)$ richtig ist
- (2) für $n \in \mathbb{N}$ gilt: $A(n)$ ist richtig impliziert $A(n')$ richtig, dann ist $A(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ richtig.

alternative Definition von \mathbb{N} :

M heißt induktiv: (\Rightarrow)

$$M \subseteq \mathbb{R}$$

$$1 \in M$$

$$\forall m \in M: m+1 \in M$$

$$\mathbb{N} := \bigcap_{M \text{ induktiv}} M$$

setzt voraus: \mathbb{R} bereits vorhanden

Bem. zur vollständigen Induktion:

ersetze \mathbb{N} durch $\mathbb{N}_m := \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq m\}$
und (1): $A(1)$ durch $A(m)$

Man beweise durch vollständige
(= mathematische) Induktion

1.) Summenformel für die endliche
arithmetische Reihe

$$a + (a+d) + (a+2d) + \dots + (a+nd) = \sum_{k=0}^n (a+k \cdot d) = \\ = (n+1)a + \frac{n(n+1)}{2}d$$

2.) Summenformel für die endliche geometr. Reihe

$$b + bq + \dots + b \cdot q^n = \sum_{k=0}^n b \cdot q^k = b \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, q \neq 1$$

3.) $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n-1) = n^2$

4.) $3 + 9 + 15 + \dots + (6n-3) = 3n^2$

5.) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

6.) $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$

Bruchzahlen (positive rationale Zahlen)

$$\frac{a}{b} \quad a, b \in \mathbb{N}$$

Satz: Es gilt $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ genau dann,
wenn $ad = bc$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Darstellung durch Dezimalbrüche

Rationale Zahlen

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N} \right\}$$

Körperaxiome

$$+ : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$$
$$(a, b) \longmapsto a + b$$

$$\cdot : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$$
$$(a, b) \longmapsto a \cdot b$$

$$(\text{Ass. } +) : \forall a, b, c \in \mathbb{Q} \quad (a + b) + c = a + (b + c)$$

$$(\text{Komm. } +) : \forall a, b \in \mathbb{Q} \quad a + b = b + a$$

$$(\text{Neut. } +) : \exists 0 \in \mathbb{Q} \quad \forall a \in \mathbb{Q} \quad a + 0 = a$$

$$(\text{Inv. } +) : \forall a \in \mathbb{Q} \quad \exists a' \in \mathbb{Q} \quad a + a' = 0$$

$$(\text{Ass. } \cdot) : \forall a, b, c \in \mathbb{Q} \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

$$(\text{Komm. } \cdot) : \forall a, b \in \mathbb{Q} \quad a \cdot b = b \cdot a$$

$$(\text{Neut. } \cdot) : \exists 1 \in \mathbb{Q} \quad \forall a \in \mathbb{Q} \quad a \cdot 1 = a$$

$$(\text{Inv. } \cdot) : \forall a \in \mathbb{Q} \quad \exists a^x \in \mathbb{Q} \quad a \cdot a^x = 1$$

$$(\text{Distr.}) : \forall a, b, c \in \mathbb{Q} \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Anordnungsaxiome

$\forall a, b, c \in \mathbb{Q}$ gilt:

Trichotomiegesetz

Entweder $a < b$ oder $a = b$ oder $b < a$

Transitivitätsgesetz

Wenn $a < b$ und $b < c$, dann $a < c$

Monotoniegesetze

(Mon+): Wenn $a < b$, dann $a + c < b + c$

(Mon·): Wenn $a < b$ und $0 < c$, dann $a \cdot c < b \cdot c$

Betrag einer rationalen Zahl

Definition: Für jede rationale Zahl a
setzt man

$$|a| = \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

Man nennt $|a|$ den Betrag von a .

Man beweise:

a.) Für alle (rationalen) Zahlen $x \geq 0$ gilt:

$$1-x \leq \frac{1}{1+x} \leq 1-x+x^2$$

b.) Für alle Zahlen x mit $-1 < x < 0$ gilt die linke, aber nicht die rechte der Ungleichungen in a)

c.) Für alle Zahlen $x \geq -0,5$ gilt:

$$\frac{1}{1+x} \leq 1-x+2x^2$$

Beantworte mit Begründung: Gilt für alle $a, b \in \mathbb{Q}$

a.) $a \leq |a|$? $-a \leq |a|$? $-|a| \leq a$? $|a| \leq a$?

b.) $|a-b| \leq |a|+|b|$? $|a-b| \leq |a+b|$?

$|a-b| \geq |a|-|b|$? $|a-b| \geq |b|-|a|$?

c.) Wenn $|a| < |b|$, dann $a^2 < b^2$?

Wenn $a^2 < b^2$, dann $|a| < |b|$?

Reelle Zahlen

- Inkommensurable Streckenpaare
- Zahlenstrahl

Satz: Es gibt keine rationale Zahl x
mit $x^2 = 2$

Satz: Ist p eine Primzahl, so gibt es
keine rationale Zahl x mit $x^2 = p$

Satz: Ist $a \in \mathbb{N}$ und a nicht Zehnerpotenz,
dann gibt es keine rationale Zahl x
mit $10^x = a$

- reelle Zahlen und Dezimalbrüche

Archimedisches Axiom:

Zu jeder Zahl x gibt es eine natürliche Zahl n mit $x < n$

Definition: Für jede Zahl $a \in \mathbb{R}_0^+$ und jedem Exponenten $n \in \mathbb{N}$ versteht man unter der n -ten Wurzel aus a (geschrieben $\sqrt[n]{a}$) die eindeutig bestimmte Zahl $b \in \mathbb{R}_0^+$ mit der Eigenschaft $b^n = a$

- Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt $\sqrt{a^2} = |a|$

Definition: Seien $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, so ist $\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ das arithmetische Mittel dieser Zahlen. Sind $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}_0^+$ so ist $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$ das geometrische Mittel

Satz: Das geometrische Mittel von n nichtnegativen Zahlen ist stets kleiner oder gleich dem arithmetischen Mittel

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

(Gleichheit besteht nur für $a_1 = a_2 = \dots = a_n$)

- Heron - Algorithmus zur Berechnung der Quadratwurzel von a

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

ist GW \rightarrow

Komplexe Zahlen

$$\text{komplexe Zahl: } z = a + ib \quad a, b \in \mathbb{R}$$

/ \
Realteil Imaginärteil

$$\operatorname{Re} z = a$$

$$\operatorname{Im} z = b$$

$$\mathbb{C} = \{ z \mid z = a + ib; a, b \in \mathbb{R} \wedge i^2 = -1 \}$$

$$(a + ib) = (c + id) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$$

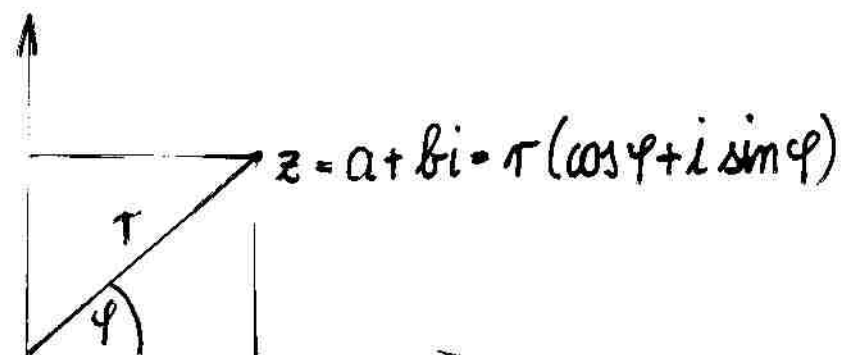
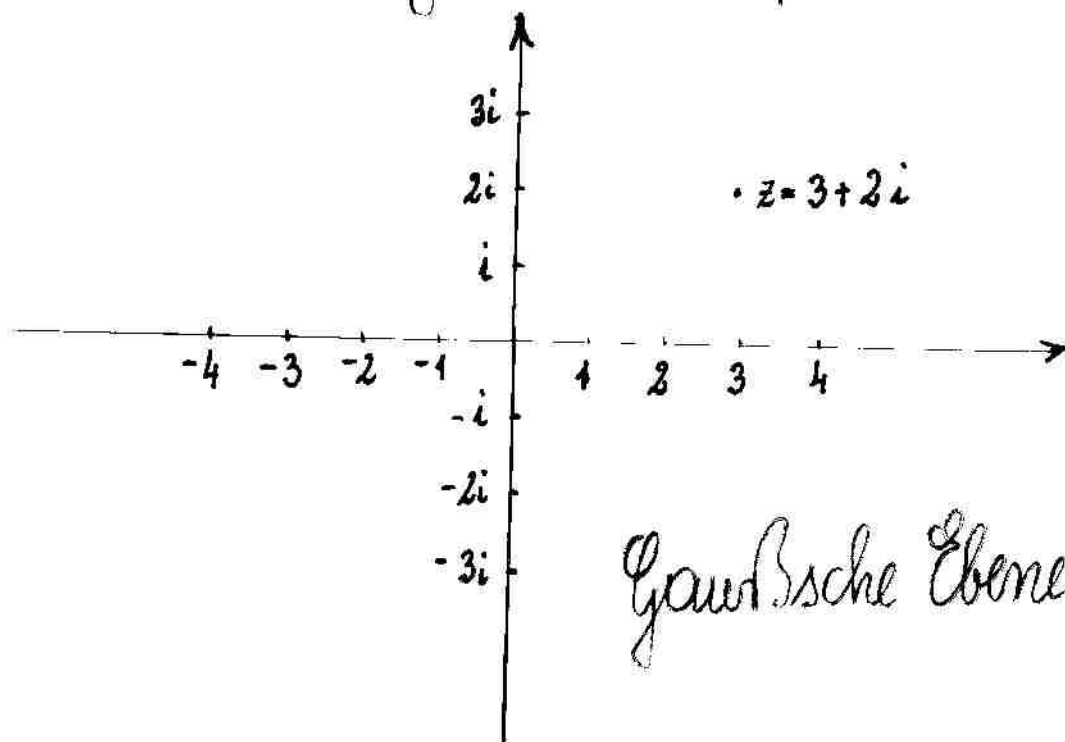
$$\text{Addition: } (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$$

$$\text{Subtraktion: } (a + ib) - (c + id) = (a - c) + i(b - d)$$

$$\text{Multiplikation: } (a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

$$\text{Division: } \frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib)(c - id)}{\underbrace{(c + id)(c - id)}_{c^2 + d^2}} \quad (c + id) \neq 0$$

Darstellung der komplexen Zahlen



$$a = r \cos \varphi \quad b = r \sin \varphi$$

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\tan \varphi = \frac{b}{a} \quad 0 \leq \varphi \leq 360^\circ$$

Multiplikation:

$$Z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$$

$$Z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

$$Z_1 \cdot Z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Division:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

Potenzieren

$$Z^n = r^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$$

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$$

Formel von Moivre

Wurzeln komplexer Zahlen

$$Z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi) = r (\cos(\varphi + k \cdot 360^\circ) + i \sin(\varphi + k \cdot 360^\circ))$$

$k \in \mathbb{Z}$

oder $Z = r (\cos(\varphi + 2k\pi) + i \sin(\varphi + 2k\pi))$

$$\sqrt[n]{Z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{k \cdot 360^\circ}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{k \cdot 360^\circ}{n}\right) \right)$$

$k = 0, 1, \dots, (n-1)$

oder $\sqrt[n]{Z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) \right)$

$k = 0, 1, \dots, (n-1)$

der Wurzelwert für $k=0$ heißt Hauptwert der Wurzel

$$\sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi}{n} + i \sin \frac{\varphi}{n} \right)$$

Exponentialform komplexer Zahlen

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$e^{i\varphi} = 1 + \frac{i\varphi}{1!} + \frac{i^2\varphi^2}{2!} + \frac{i^3\varphi^3}{3!} + \frac{i^4\varphi^4}{4!} + \frac{i^5\varphi^5}{5!} + \frac{i^6\varphi^6}{6!} + \dots$$

$$= 1 + \frac{i\varphi}{1!} - \frac{\varphi^2}{2!} - \frac{i\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \frac{i\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \dots$$

$$= 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \dots + i\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \dots\right)$$

$$= \cos \varphi + i \sin \varphi$$

$$Z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = r \cdot e^{i\varphi}$$

$$e^{i\pi} + 1 = 0 !$$

II. Rechnen mit Variablen

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n \cdot (n-1)! \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

REKURSIV

$$0! = 1$$

Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \quad (0 \leq k \leq n)$$

$$\binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n}{k} = 0 \quad \text{falls } k > n \quad \binom{n}{n} = 1$$

$$(a \pm b)^n = \binom{n}{0} a^n \pm \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots \pm (-1)^n \binom{n}{n} b^n$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$$

oder
$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$$

Kürzen

$$\frac{64a^2b}{16ab^2}, \quad \frac{6x-12}{7x-14}, \quad \frac{a^2x-ax^2}{x^2-a^2}$$

$$\frac{mx+m-x-1}{m^2-1}$$

Addieren

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b}, \quad \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a-b}, \quad \frac{1}{x} + \frac{x+1}{x^2-x} - \frac{x-1}{x^2+x} - \frac{4}{x^2-1}$$

$$\frac{2}{(a-1)^3} + \frac{1}{(a-1)^2} - \frac{2}{1-a} - \frac{1}{a}, \quad \frac{a(3b-2c)}{6bc} - \frac{b(4a-5c)}{10ac} + \frac{8a^2+3b^2}{6ab} - \frac{5a-4b}{10c}$$

Multiplizieren

$$\frac{2a}{3bc} \cdot 6b^2, \quad (m-n) \cdot \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right), \quad \frac{72uv^2}{11rs} \cdot \frac{121r^2s}{8uv}$$

$$\left(\frac{4x}{3a} - \frac{3y}{5b}\right) \left(\frac{4x}{3a} + \frac{3y}{5b}\right), \quad \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2$$

Dividieren

$$\frac{98x^2}{15ab} : 49x, \quad (pq-2qr) : \frac{2q}{pr}, \quad \frac{p^2-q^2}{2a^2b^2} : \frac{p-q}{10ab}$$

$$\left(\frac{x}{y^2} + \frac{y^2}{x}\right) : \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$$

Doppelbrüche

$$\frac{\frac{3}{a} - \frac{5}{b}}{\frac{5}{a} - \frac{3}{b}}$$

$$\frac{\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$$

$$\frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

$$\frac{\frac{2}{m} - \frac{4}{n}}{1 + \frac{2}{m} \cdot \frac{4}{n}}$$

$$\frac{\frac{a+1}{a-1} - 1}{1 + \frac{a+1}{a-1}}$$

$$\frac{\frac{1}{a^2} - \frac{2}{ab} + \frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}}$$

1. Bernoullische Gleichung

$$p + \rho g h + \frac{1}{2} \rho v^2 = c \quad \rho = ?$$

2. Elektrische Widerstände in Parallelschaltung

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (R \neq R_1) \quad R_2 = ?$$

3. Gesetz von Hagen-Poiseuille

$$I = \frac{\pi \cdot r^4 (p - p_0)}{8 \eta l} \quad (r > 0) \quad p = ?$$

4. Van der Waal'sches Gesetz

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right) \cdot (V - b) = n \cdot R \cdot T \quad (p, a > 0) \quad b = ?$$

5. Linsengleichung

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = (n-1) \cdot \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) \quad (a, b, r_i \in \mathbb{R}^+, \\ (b+a)r_1 \neq a \cdot b \cdot (n-1))$$

$$r_2 = ?$$

$$1. \phi = \frac{2(c-p)}{2gh+v^2}$$

$$2. R_2 = \frac{R \cdot R_1}{R_1 - R}$$

$$3. p = p_0 + \frac{I \cdot 8\eta l}{r^4 \pi}$$

$$4. b = V - \frac{nRTV^2}{pV^2 + a}$$

$$5. \tau_2 = \frac{\tau_1(n-1)ab}{(a+b)\tau_1 - (n-1)ab}$$

Potenzen

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-mal}}$$

$$a^0 = 1 \text{ für } a \neq 0; \quad 0^n = 0 \quad (n \neq 0)$$

0^0 ist nicht definiert!

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$\frac{a^n}{a^m} = \begin{cases} a^{n-m} & \text{falls } n \geq m \\ \frac{1}{a^{m-n}} & \text{falls } n < m \end{cases}$$

$$\frac{1}{a^n} = a^{-n} \quad a \neq 0$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad b \neq 0$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$\frac{a^n}{a^3}, \quad \frac{a^{n+1}}{a^{n-1}}, \quad \frac{a^3}{a^{3m}}$$

$$\frac{a^7}{a^{-3}}, \quad \left(\frac{1}{a}\right)^{-1}$$

$$x^{n-8} : x^{5-2n}, \quad a^{m-1} b^{n-1} : (a^m b^n)$$

$$\frac{(a-1)^4 (x-1)^3}{(a-1)^3 (1-x)^2}, \quad \frac{a^3 b^{-2}}{x^5 y^{-4}}, \quad \frac{a^2 b}{x^{-3} y^{-1}}, \quad \frac{6a^5 b^3 c^{n+1}}{5x^3 y z^{n+4}} : \frac{3a^3 b^4 c}{10x^4 y^n z^5}$$

$$(ax^m + bx^n + cx^{m+n}) : x^{m-n}, \quad (x^{2m} - y^{2n}) : (x^m - y^n)$$

$$(a^3)^{n-1}, \quad \frac{(a^3 b^4)^3}{(a^2 b^3)^2}, \quad \left(\frac{ab^2}{x^3}\right)^2 \cdot \left(\frac{xy^2}{a}\right)^3, \quad \left(\frac{4a^2 - 9b^2}{2x^2 + 3xy}\right)^3 : \left(\frac{2ab - 3b^2}{4x^2 - 9y^2}\right)^3$$

$$a^n = b \quad (n \in \mathbb{N})$$

Wurzel: Unter der n -ten Wurzel $\sqrt[n]{b}$ aus einer Zahl $b \geq 0$ versteht man diejenige Zahl $a \geq 0$ für die gilt $a^n = b$

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\sqrt[n]{a^r} = (\sqrt[n]{a})^r$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[r]{a}} = \sqrt[n \cdot r]{a} = \sqrt[r]{\sqrt[n]{a}}$$

$$a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$$

Logarithmen

Definition: Seien $a, y \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$.

Dann heißt jene Zahl $x \in \mathbb{R}$ für die gilt $a^x = y$, Logarithmus von y zur Basis a .

(Schreibweise: $x = {}^a \log y$)

$${}^a \log (x \cdot y) = {}^a \log x + {}^a \log y$$

$${}^a \log \left(\frac{x}{y} \right) = {}^a \log x - {}^a \log y$$

$${}^a \log (x^y) = y \cdot {}^a \log x$$

$${}^b \log y = \frac{{}^a \log y}{{}^a \log b}$$

III. Mengen und Logik

- Mengen

- Darstellung
 - aufzählend
 - beschreibend

- Aussagen

- Aussageformen

- Äquivalenz $A(x)$ äqu. $B(x)$ genau dann, wenn $\{x \mid A(x)\} = \{x \mid B(x)\}$

- Gleichungen - Lösen von Gleichungen

- Quantoren : \exists Existenzquantor

- \forall Allquantor

Aussagen: wahr/falsch

625 ist eine Quadratzahl JA

Reput 25? NEIN

Haus Kimmel wird 2006 Rapid-Trainer JA

Aussageform: mind. 1 freie Variable

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{JA}$$

625 ist eine Quadratzahl NEIN

$$\forall n, m \in \mathbb{N}: \underbrace{n+m}_{A(n, m)} \in \mathbb{N} \quad \text{JA}$$

Operationen für Aussagen und Mengen

- Negation (\neg)
- Konjunktion (\wedge)
- Disjunktion (\vee)

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$
W	W	F	W	W
W	F	F	F	W
F	W	W	F	W
F	F	W	F	F

Seien A, B Mengen

$\complement A$ Komplement von A

$A \cap B$ Durchschnitt

$A \cup B$ Vereinigung

$A \subseteq B$

$A \not\subseteq B$

weitere logische Operationen

Implikation " \Rightarrow "

Äquivalenz " \Leftrightarrow "

P	Q	$P \Rightarrow Q$
w	w	w
w	F	F
F	w	w
F	F	w

P	$P \Leftrightarrow Q$	Q
w	w	w
F	F	F
F	F	w
w	w	F

noch mehr

$P \nabla Q$, $P \vee Q$, $P \wedge Q$

Zu Mengen:

$$A \times B := \{ (x, y) \mid x \in A, y \in B \}$$

Kartesisches
Produkt

weitere logische Operationen

Implikation " \Rightarrow "

Äquivalenz " \Leftrightarrow "

P	Q	$P \Rightarrow Q$
w	w	w
w	F	F
F	w	w
F	F	w

P	\Leftrightarrow	Q
w	w	w
F	F	F
F	w	w
w	F	F

noch mehr

$P \nabla Q$, $P \vee Q$, $P \wedge Q$

Zu Mengen:

$$A \times B := \{ (x, y) \mid x \in A, y \in B \}$$

Kartesisches
Produkt

IV. Funktionen

Definition: Es seien A, B Mengen. Unter einer Funktion oder Abbildung f von A nach B versteht man eine Zuordnungsvorschrift, die jedem Element von A genau ein Element von B zuordnet.

Schreibweise: $f: A \rightarrow B$
 $x \mapsto f(x)$

A heißt Definitionsmenge, B heißt Zielmenge
Jedes Element x der Definitionsmenge heißt Argument oder Stelle, das dem Element $x \in A$ zugeordnete Element $f(x) \in B$ heißt Bildelement an der Stelle x oder Funktionswert an der Stelle x .

Graph von f : $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$

$$G_f \subseteq A \times B$$

- Darstellungen von Funktionen
 - Wertetabelle
 - graphische Darstellungen

Seien $f_1: A_1 \rightarrow B_1$ und $f_2: A_2 \rightarrow B_2$ Funktionen

$f_1 = f_2$ wenn $A_1 = A_2$ und $B_1 = B_2$ und $\forall x \in A_1, f_1(x) = f_2(x)$

Sei $f: A \rightarrow B$ eine Funktion

f heißt injektiv, wenn aus $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

f heißt surjektiv, wenn für jedes $y \in B$ ein $x \in A$ existiert mit $f(x) = y$

f ist bijektiv, wenn f injektiv und surjektiv ist.

- Umkehrabbildung

Reelle Funktionen

$$f: A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

- konstante Funktion : $x \mapsto c$
- identische Funktion : $x \mapsto x$
- lineare Funktion : $x \mapsto ax$
- affine Funktion : $x \mapsto ax + b$
- Potenzfunktionen : $x \mapsto x^n$
- Polynomfunktion : $x \mapsto a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$
- (gebrochen) rationale Funktion : $x \mapsto \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m}$
- Wurzelfunktion : $x \mapsto \sqrt[n]{x}$
- Betragsfunktion : $x \mapsto |x|$
- Größte - Ganze - Funktion : $x \mapsto [x]$

• Winkelfunktionen: \sin , \cos , \tan

• Exponentialfunktionen: $x \mapsto a^x$
zur Basis $a > 0$

• Logarithmusfunktion: $x \mapsto {}^a \log x$
zur Basis $a > 0$

Folgen

Definition: Eine Abbildung $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$
 $n \mapsto a_n$

heißt reelle Zahlenfolge

Schreibweisen: (a_n) , $\langle a_n \rangle$, $\langle a_n | n \in \mathbb{N} \rangle$

Definition: Die Zahlenfolge (a_n) konvergiert oder strebt gegen a , wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index $n_0(\varepsilon)$ gibt, so daß

für alle $n > n_0(\varepsilon)$ stets $|a_n - a| < \varepsilon$ ist.

a heißt Grenzwert oder Limes der Folge (a_n)

Schreibweisen: $a_n \rightarrow a$ für $n \rightarrow \infty$ oder $a_n \rightarrow a$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ oder $\lim a_n = a$

• arithmetische Folge: $n \mapsto k \cdot n + d$

• geometrische Folge: $n \mapsto b \cdot q^n$ ($q \neq 0$)

Satz: Seien (a_n) und (b_n) konvergente Folgen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, so gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad \text{für jede Konstante } c$$

Ist überdies $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$, so sind fast alle $b_n \neq 0$

$$\text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$$

Beispiele: $(a, a, a, \dots) \rightarrow a$

$$\frac{1}{n} \rightarrow 0, \quad \frac{1}{\sqrt[p]{n}} \rightarrow 0 \quad (p \in \mathbb{N} \text{ fest})$$

$$\sqrt[n]{n} \rightarrow 1, \quad q^n \rightarrow 0 \text{ f. } |q| < 1$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e, \quad (-1)^n \text{ diverg., } \frac{(n+1)^2 - n^2}{n} \rightarrow 2$$

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \text{ diverg.}$$

Stetigkeit von Funktionen

Definition 1: Sei $f: X \rightarrow Y$ eine Funktion

Eine Funktion f heißt stetig an einer Stelle x ihres Definitionsbereiches X , wenn für jede Folge (x_n) aus X , die gegen x strebt, immer auch $f(x_n) \rightarrow f(x)$ konvergiert.

Definition 2: Die Funktion $f: X \rightarrow Y$ heißt stetig in $x \in X$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ gibt, so daß

für alle $y \in X$ mit $|y - x| < \delta$ stets $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$

Definition 3: f ist genau dann stetig in x , wenn zu jeder ε -Umgebung V von $f(x)$ immer eine δ -Umgebung U von x existiert, so daß

$$f(U \cap X) \subset V$$

Nullstellensatz von Bolzano:

Ist die Funktion f auf dem Intervall $[a, b]$ stetig und ist überdies $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ (oder $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$), so besitzt die Funktion f mindestens eine Nullstelle in (a, b) .

Zwischenwertsatz von Bolzano:

Eine stetige Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ nimmt jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

REGULA FALSI

V. Differenzieren

Definition: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion.

f heißt differenzierbar im Punkt $x_0 \in I$, wenn

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ existiert (und endlich ist).}$$

Dieser Limes wird als Ableitung an der Stelle x_0 bezeichnet (Schreibweise $f'(x_0)$)

Andere Formulierungen

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

oder

$$F_{x_0}(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} & \text{für } x \neq x_0 \\ f'(x_0) & x = x_0 \end{cases}$$

ist stetig.

Satz: Die Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann in $x_0 \in I$ differenzierbar, wenn $f(x_0+h) - f(x_0)$ in der Form

$$f(x_0+h) - f(x_0) = a \cdot h + r(h) \text{ mit } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0$$

dargestellt werden kann; in diesem Fall ist $a = f'(x_0)$

Differentiationsregeln

Satz: Die Funktionen f und g seien auf dem Intervall I definiert und in $x_0 \in I$ differenzierbar. Dann sind auch $f+g$, $f-g$, αf , $f \cdot g$ und $\frac{f}{g}$ (falls $g \neq 0$) differenzierbar in x_0 und es gilt

$$(f+g)' = f' + g' \quad (f-g)' = f' - g'$$

$$(f \cdot g)' = f \cdot g' + f' \cdot g \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

Satz (Kettenregel): Seien f und g differenzierbare Funktionen, sodass $g \circ f$ existiert.

Dann ist $g \circ f$ differenzierbar und es gilt:

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Differentiation elementarer Funktionen

$$f(x) = x^n$$

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

$$f(x) = a^x$$

$$f'(x) = a^x \cdot \ln a \quad \text{für } a > 0$$

$$f(x) = e^x$$

$$f'(x) = e^x$$

$$f(x) = \ln x$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \sin x$$

$$f'(x) = \cos x$$

$$f(x) = \cos x$$

$$f'(x) = -\sin x$$

Definition: Die Funktion $f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt an der Stelle $x_0 \in X$ ein lokales Maximum bzw. lokales Minimum, wenn es eine δ -Umgebung U von x_0 gibt, so daß $\forall x \in U \cap X$ stets $f(x) \leq f(x_0)$ bzw. stets $f(x) \geq f(x_0)$

Satz: Die Funktion $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ besitze in dem inneren Punkt x_0 von X ein lokales Extremum und sei in x_0 differenzierbar, dann gilt
$$f'(x_0) = 0$$

Satz: Ist die Funktion f auf dem Intervall I stetig und im Innern $\overset{\circ}{I}$ desselben differenzierbar, so ist f monoton wachsend, wenn $f'(x) \geq 0$ auf $\overset{\circ}{I}$ bzw. f ist monoton fallend, wenn $f'(x) \leq 0$ auf $\overset{\circ}{I}$

Definition: Die Funktion $f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt an der Stelle $x_0 \in X$ ein lokales Maximum bzw. lokales Minimum, wenn es eine δ -Umgebung U von x_0 gibt, so daß $\forall x \in U \cap X$ stets $f(x) \leq f(x_0)$ bzw. stets $f(x) \geq f(x_0)$

Satz: Die Funktion $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ besitze in dem inneren Punkt x_0 von X ein lokales Extremum und sei in x_0 differenzierbar, dann gilt
$$f'(x_0) = 0$$

Satz: Ist die Funktion f auf dem Intervall I stetig und im Innern $\overset{\circ}{I}$ desselben differenzierbar, so ist f monoton wachsend, wenn $f'(x) \geq 0$ auf $\overset{\circ}{I}$ bzw. f ist monoton fallend, wenn $f'(x) \leq 0$ auf $\overset{\circ}{I}$

Satz: Die Funktion f sei differenzierbar auf einer δ -Umgebung U von x_0 und ihre Ableitung verschwinde in x_0 . Dann ist

x_0 Stelle eines lokalen Maximums, wenn $f'(x)$ positiv für alle $x < x_0$ und negativ für alle $x > x_0$ ist;

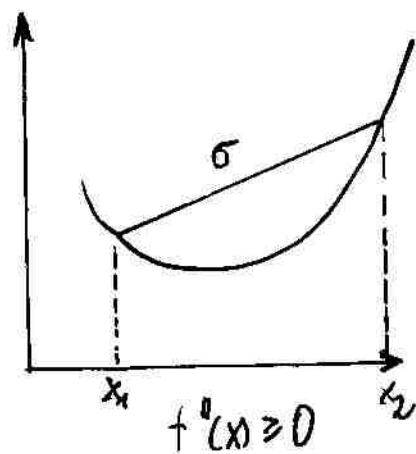
x_0 ist Stelle eines lokalen Minimums, wenn $f'(x)$ negativ für alle $x < x_0$ und positiv für alle $x > x_0$ ist.

Existiert überdies $f''(x_0)$, so ist x_0

Stelle eines lokalen Maximums, wenn $f''(x_0) < 0$

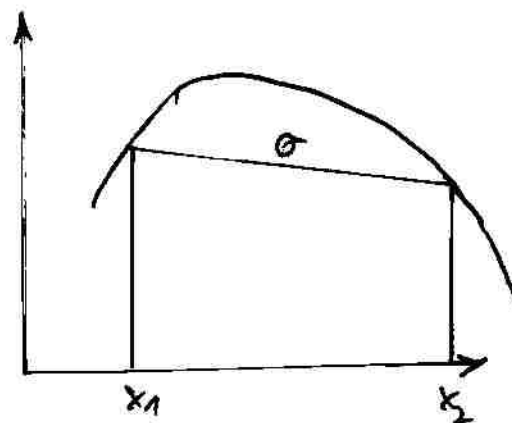
Stelle eines lokalen Minimums, wenn $f''(x_0) > 0$

konvex



f unterhalb σ

konkav



f oberhalb σ

Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Ist die Funktion f auf dem kompakten Intervall $[a, b]$ stetig und im Inneren desselben differenzierbar, so gibt es mindestens einen Punkt x_0 in (a, b) an dem

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Satz von Rolle:

Ist die Funktion f auf dem kompakten Intervall $[a, b]$ stetig und im Inneren desselbe differenzierbar und gilt $f(a) = f(b)$, so gibt es mindestens eine Stelle $x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = 0$

Ableitung der Umkehrfunktion

VI. Integrieren

Definition: Es sei f eine reelle Funktion.

Eine reelle Funktion F heißt

Stammfunktion von f , falls $F' = f$

Man bezeichnet F auch als unbestimmtes Integral

Schreibweise: $F = \int f \, dx$

oder $F(x) = \int f(x) \, dx$

Satz: Es sei f eine auf einem Intervall definierte reelle Funktion und F_0 eine Stammfunktion von f . Dann gilt:

F ist genau dann eine Stammfunktion von f

wenn $F = F_0 + c \quad (c \in \mathbb{R})$

Stammfunktionen

$$\int c dx = cx$$

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x|$$

$$\int e^x dx = e^x$$

$$\int \sin x dx = -\cos x$$

$$\int \cos x dx = \sin x$$

$$\int \ln x dx = x \cdot \ln x - x$$

Integrationsregeln

$$\int (f \pm g) dx = \int f dx \pm \int g dx$$

$$\int (\lambda f) dx = \lambda \int f dx \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b)$$

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln |g(x)|$$

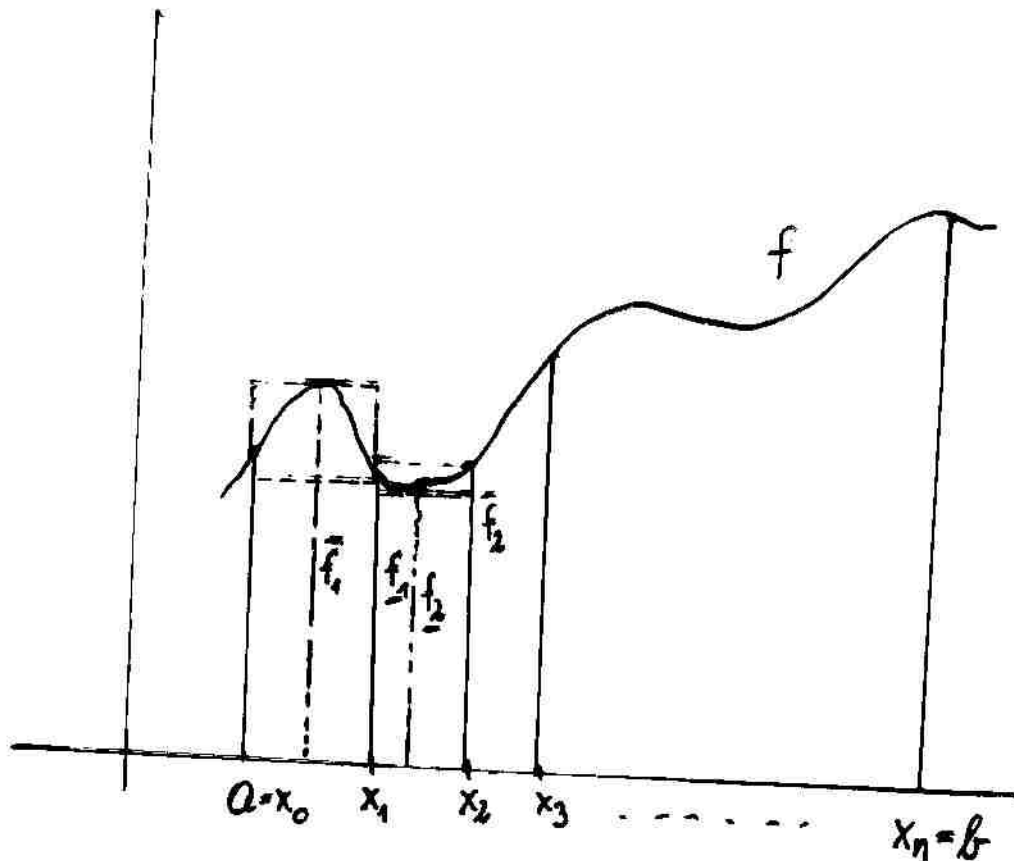
$$\int f g dx = F g - \int F g' dx$$

(partielle Integration)

$$\int f(x) dx = \left(\int f(g(t)) \cdot g'(t) dt \right) \Big|_{t=g^{-1}(x)}$$

Substitution

Flächeninhalt und Integral



Seien $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ Einteilungspunkte

$$U_n = \underline{f}_1 (x_1 - x_0) + \underline{f}_2 (x_2 - x_1) + \dots + \underline{f}_n (x_n - x_{n-1})$$

$$O_n = \bar{f}_1 (x_1 - x_0) + \bar{f}_2 (x_2 - x_1) + \dots + \bar{f}_n (x_n - x_{n-1})$$

$$\underline{f}_i := \inf \{ f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i] \}$$

$$\bar{f}_i := \sup \{ f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i] \}$$

Def.: $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt

Supremum aller Untersummen U_n
 \rightarrow Infimum aller Obersummen O_n

\Leftrightarrow : f ist (Riemann, R-) integrierbar

Bezeichnung: $\int_a^b f = \int_a^b f(x) dx$

a untere Grenze des Integrals $\int_a^b f$
 b obere

Satz: $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig

$\Rightarrow f$ ist R-integrierbar

Satz: $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stückweise stetig
(endl. viele Sprungstellen)

$\Rightarrow f$ ist R-integrierbar

Definition: Es sei $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ eine integrierbare reelle Funktion und D_f ein Intervall. Jede Funktion

$$F_d: D_f \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \int_d^x f \quad (d \in D_f)$$

heißt Integralfunktion von f

Satz: (Hauptsatz der Differential- u. Integralrechnung)
Es sei $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ eine (integrierbare und) stetige (reelle) Funktion und D_f ein Intervall $[a, b]$
Dann gilt: Jede Integralfunktion von f ist eine Stammfunktion von f

Satz: Es sei $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ eine (integrierbare)
(und) stetige (reelle) Funktion und D_f ein
Intervall. ~~es~~ Ferner sei F eine Stamm-
funktion von f .

Dann gilt für alle $a, b \in D_f$

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

mit $c < d \in \mathbb{R}$

Sei $x_0 = a < x_1 < x_2 \dots < x_n$ eine Einteilung
des Intervalls $[a, b]$.

$$Z_n = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \dots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1})$$

wobei $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$

Verfeinert man die Einteilung so, daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0 \quad \text{wobei} \quad \delta_n = \max_{0 \leq i \leq n} |x_i - x_{i-1}|$$

So gilt:

Satz: Sei f integrierbar auf $[a, b]$. Dann
gilt für jede Folge (Z_n) von Zwischensummen,
für die ~~hier~~ die zugehörige Folge von
Zerlegungen $\delta_n \rightarrow 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = \int_a^b f$$

VII. Vektoren

Vektoren

Zwei Vektoren werden als gleich bezeichnet, wenn sie durch Parallelverschiebung auseinander hervorgehen.

Vektoraddition

Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl

Koordinatendarstellung eines Vektors

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Addition, Multiplikation mit einer reellen Zahl
Länge eines Vektors

Ortsvektoren

Unter dem Ortsvektor eines Punktes A versteht man den Vektor, der vom Koordinatenursprung zum Punkt A führt, d. h. den Vektor \vec{OA}

Abstand zweier Punkte

$$\|\vec{AB}\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

Mittelpunkt einer Strecke AB

$$M = \begin{pmatrix} \frac{a_1 + b_1}{2} \\ \frac{a_2 + b_2}{2} \\ \frac{a_3 + b_3}{2} \end{pmatrix}$$

Inneres Produkt zweier Vektoren

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cos \alpha$$

Winkel zwischen zwei Vektoren

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}$$

Vektoriellles Produkt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

\mathbb{R}^n

Vektorraum

Gerade:

$$X = P + t \vec{a} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\vec{n} \cdot X = \vec{n} \cdot P \quad \vec{n} \text{ Normalvektor}$$

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = a_0$$

Ebene

$$X = P + t \vec{a} + s \vec{b}$$

$$\vec{n} \cdot X = \vec{n} \cdot P \quad \vec{n} \text{ Normalvektor}$$

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = a_0$$

VIII. Gleichungssysteme - Matrizen

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

allgemeines lineares Gleichungssystem

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Gaußsches Eliminationsverfahren

Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\begin{matrix} n \\ m \end{matrix}} = \mathbb{R}^{m \times n}$$

Anzahl d. Spalten
Anzahl d. Zeilen

spezielle Matrizen

$$A = (a_{ij})$$

Zeilenindex
Spaltenindex

Spaltenvektoren: $\bar{a}_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$

Zeilenvektoren: $a_j = (a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jn})$

Addition

Multiplikation mit einer reellen Zahl

Matrizenprodukt

$$A \in \mathbb{R}_m^n, B \in \mathbb{R}_{m \times p}^{p \times n}$$

$$A \cdot B = C \in \mathbb{R}_{m \times p}^{m \times n}$$

$$(a_{ij}) \cdot (b_{kl}) = (c_{ie})$$

$$c_{ie} = a_i \cdot \bar{b}_e = a_{i1} \cdot b_{1e} + a_{i2} \cdot b_{2e} + \dots + a_{in} \cdot b_{ne}$$

Matrizen und lineare Abbildungen

Rang einer Matrix

Ableitung / Differenzieren einer
vektoriellen Funktion

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad D \subseteq \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) := \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

mit $f_i: D \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$

f differenzierbar in x_0

$\Leftrightarrow \forall i = 1, \dots, n: f_i$ differenzierbar
in x_0

$$f'(x_0) = \begin{pmatrix} f_1'(x_0) \\ \vdots \\ f_n'(x_0) \end{pmatrix}$$

Differenzieren von

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}, \quad D \subseteq \mathbb{R}^n$$

Dazu:

partielle Ableitung

f ist in $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ nach x_k partiell differenzierbar ($k \in \{1, \dots, n\}$ fix)

\Leftrightarrow

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + h, x_{k+1}, \dots, x_n) - f(x)}{h}$$

$$=: \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \text{ existiert}$$

Falls alle partiellen Ableitungen existieren:

f ist partiell differenzierbar

$$\nabla f(x) = \text{grad } f(x) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$$

Gradient von f

Differenzierbar von

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad D \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$f = (f_1, \dots, f_m)^T$$

alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ existieren.

Dann

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} =: Df(x) =: J_f(x)$$

Jakobimatrix von f in x

Ist einziger Kandidat für $f'(x)$

$$\rightarrow \text{An I}$$

$$a.) \quad x \geq 0 \Rightarrow x+1 \geq 1 > 0$$

\Rightarrow Ungleichungen darf mit $x+1$ mult. werden

$$\Leftrightarrow \underbrace{1-x^2}_{\leq 0} \leq 1 \leq \underbrace{1-x+x^2}_{\geq 0} + \underbrace{x-x^2+x^3}_{\geq 0} = \underbrace{1+x^3}_{\geq 0}$$

w. A.

$$b.) \quad x > -1 \Rightarrow \text{linker Teil gilt}$$

$$0 > x > -1 \Rightarrow x^3 < 0 \Rightarrow \text{rechts ist falsch}$$

$$c.) \quad x \geq -0,5 \Rightarrow 1+x \geq 0,5 > 0$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq \underbrace{1-x+2x^2}_{\geq 0} + \underbrace{x-x^2+2x^3}_{? \geq 0}$$

$$= 1 + \underbrace{x^2}_{\geq 0} + \underbrace{2x^3}_{\leq 0}$$

aber $x^3 \geq -0,5^3$
reicht nicht

\Rightarrow umschreiben

$$= 1 + x^2 \cdot (1+2x)$$

$$\underbrace{\geq 0}_{\geq 0} \cdot \underbrace{\geq 0}_{\geq 0} \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$$

Teil 2.

$$a.) \text{ beachte iii) } -a \leq |a| \Leftrightarrow a \geq -|a|$$

$$\text{IV} \quad \forall a = -1$$

$$b.) \text{ ii) } \forall a=1, b=1$$

$$c.) \text{ iv) } \forall |b| \Rightarrow |a| \cdot |a| \leq |a| \cdot |b|, |a| \cdot |b| < |b| \cdot |b| = \text{B...}$$

$$\Downarrow$$

$$b \neq 0 \quad \xrightarrow{\hspace{10em}}$$